Def: $M \in R\text{-mod}$:

$$\operatorname{Supp} M := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}.$$

Exemplo: $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/\langle n \rangle$

$$\Rightarrow \operatorname{Supp} M = \{ p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é primo e } p \mid n \}$$

$$M_{\langle p \rangle} = \left(\mathbb{Z}/\langle n \rangle \right)_{\langle p \rangle} = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} / n\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$$

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{ \langle 0 \rangle \} \cup \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ primo}}} \{ \langle p \rangle \}$$

Proposição:

(1) $0 \to L \to M \to N \to 0$ exata

$\Rightarrow \operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} L \cup \operatorname{Supp} N$

(2) $\operatorname{Supp}\left(\sum_\lambda M_\lambda\right) = \bigcup_\lambda \operatorname{Supp}(M_\lambda)$

(3) $\operatorname{Supp} M \subset V(\operatorname{Ann}(M))$, com $=$ se M é f.g.

(4) $\operatorname{rad} M \subset \bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximal} \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M}} \mathfrak{m}$ com $=$ se M é f.g.

Dem: (1) ✓

(2) Temos $\bigcup_\lambda \operatorname{Supp} M_\lambda \subset \operatorname{Supp}\left(\sum_\lambda M_\lambda\right)$

$$\bigoplus_\lambda M_\lambda \twoheadrightarrow \sum_\lambda M_\lambda$$

$$\Rightarrow \operatorname{Supp}\left(\bigoplus_\lambda M_\lambda\right) \supset \operatorname{Supp}\left(\sum_\lambda M_\lambda\right)$$

$$\operatorname{Supp}\left(\bigoplus_\lambda M_\lambda\right) = \bigcup_\lambda \operatorname{Supp}(M_\lambda)$$

(3) $M_\mathfrak{p} \neq 0 \Rightarrow (R-\mathfrak{p}) \cap \operatorname{Ann}(M) = \emptyset$

$$\Rightarrow \operatorname{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}$$

$$\therefore \mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}(M))$$

Se M é f.g

$$M_\mathfrak{p} = 0 \Rightarrow (R-\mathfrak{p}) \cap \operatorname{Ann}(M) \neq \emptyset$$

$$\therefore \operatorname{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$$

(4) $\mathrm{rad}\, M = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximal} \\ \mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{m}}} \mathfrak{m} \subset \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximal} \\ \mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}\, M}} \mathfrak{m}$

Com $=$ se M é f.g. $\boxtimes$

Primo Minimais de um R-módulo.

Def: $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ diz-se um primo minimal de M se $\mathfrak{p}$ é minimal em $\mathrm{Supp}\, M$.

Exemplo: M é f.g. $\Rightarrow \mathrm{Supp}\, M = V(\mathrm{Ann}(M))$ $\therefore$ primos minimais de M são os primos minimais de

$\mathrm{Ann}(M)$ tal como definidos anterior/.

<u>NB</u>: Qdo $\mathfrak{a} \subset R$ é um ideal designamos por primos minimais de $\mathfrak{a}$ os primos minimais de $R/\mathfrak{a}$ como R-módulo.

<u>Proposição</u>: Se $M \in R$-mod f.g., então

$$\mathrm{nil}(M) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M} \mathfrak{p}$$

<u>Dem</u>: M f.g. $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$

logo

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

$$= \sqrt{\mathrm{Ann}(M)} \underset{\text{def}}{=} \mathrm{nil}(M)$$

$\square$

Prop: Se $M, N \in R$-mod, então

$$\mathrm{supp}(M \otimes_R N) \subset \mathrm{Supp}\, M \cap \mathrm{Supp}\, N$$

com $=$ se M e N são f.g.

Dem: Se M, N são f.g. o resultado segue de:

A anel local e $M, N \in A$-mod f.g.

então

$$M \otimes_A N \neq 0 \text{ se } M, N \neq 0$$

(A local, $P \in A$-mod f.g. $P = 0$

$$\iff P/mP = 0$$

onde m é o ideal maximo de A. $\square$

Prop: $M \in R\text{-mod}$. ASASE

(1) $M = 0$

(2) $\operatorname{Supp} M = \emptyset$

(3) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ $\forall \mathfrak{m} \subset R$ ideal maximal.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ✓

(2) $\Rightarrow$ (1) $\operatorname{Supp} M = \emptyset$

$$\Rightarrow \operatorname{nil}(M) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M} \mathfrak{p} = R$$

$$\Rightarrow M = 0 \quad \left(\operatorname{nil}(M) = \sqrt{\operatorname{Ann}(M)} = R \right)$$

(3) $\Rightarrow$ (2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ seja $\mathfrak{m}$ maximal tq. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$

Temos $M_{\mathfrak{m}} = 0 \Rightarrow M_{\mathfrak{p}} = 0$

pois $M_{\mathfrak{p}}$ é uma localização de $M_{\mathfrak{m}}$. $\square$

Prop: Uma suc. $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N$ é exata em R-mod sse

$$L_m \xrightarrow{\alpha_m} M_m \xrightarrow{\beta_m} N_m$$

é exata em R_m-mod $\forall m \subset R$ ideal maximal.

Dem: Dizer que a suc. é exata é dizer:

1. $\beta\alpha = 0$

2. $\dfrac{\operatorname{Ker}\beta}{\operatorname{Im}\alpha} = 0$

Mas 1. $\iff \forall m \in \operatorname{Spec}_m R \quad \beta_m \alpha_m = 0$

2. $\iff \forall m \in \operatorname{Spec}_m R \quad \left(\dfrac{\operatorname{Ker}\beta}{\operatorname{Im}\alpha}\right)_m = 0$

$$\iff \frac{\operatorname{Ker}\beta_m}{\operatorname{Im}\alpha_m} = 0$$

$\square$

<u>Exercício</u>: $M \in R\text{-mod}$ e $\{m_\lambda\} \subset M$

então $\langle \{m_\lambda\} \rangle = M$ sse $\langle \{\frac{m_\lambda}{1}\} \rangle = M_{\mathfrak{m}}$

$\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_m R$.

<u>Prop</u>: Seja A semi-local com ideais maximais $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ e sejam M, N f.g. . Se $M_{\mathfrak{m}_i} \simeq N_{\mathfrak{m}_i}$ então $M \simeq N$.

Prop: Seja $M \in R\text{-mod}$. Então M é plano sse

$\forall_{m \in \operatorname{Spec}_m R}$ M_m é plano em $R_m\text{-mod}$

Dem: Suponhamos válida a propriedade do enunciado.

A provar: M é plano

Seja $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ suc. exacta. Então

$$0 \to N'_m \to N_m \to N''_m \to 0$$

exacta $\forall m \in \operatorname{Spec}_m R$.

$$\Rightarrow \quad 0 \to N'_m \otimes_{R_m} M_m \to N_m \otimes_{R_m} M_m \to N''_m \otimes_{R_m} M_m \to 0$$

exata $\forall m$

$$\Rightarrow 0 \to N' \otimes_R M \to N \otimes_R M \to N'' \otimes M \to 0$$

é exata.

$\therefore$ M é plano.

$\square$

<u>Def</u>: $M \in R\text{-mod}$ diz-se <u>localmente f.g.</u> se $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ $\exists\, U \ni \mathfrak{p}$ em que M é f.g., i.e., $\exists f \in R - \mathfrak{p}$ t.q.

M_f é f.g. em R_f

<u>NB</u>: $f \in R - \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in D(f)$.

<u>NB</u>: Basta verificar M f.g. numa viz. de cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_m R$

Def: De mesma forma, define-se M local/ f.a., local/ livre, local/ livre de carat. n.

Prop: Se $M \in R\text{-mod}$

(1) M local/ f.g. $\Longrightarrow$ M f.g.

(2) M local/ f.a $\Rightarrow$ M f.a.

Dem: Como $\operatorname{Spec} R$ é quasi-compacto, se M é localmente f.g. então

$\exists \{m_1, \ldots, m_n\}$ t.q.

$N = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle \Rightarrow$

$$\left(\frac{M}{N}\right)_{\mathfrak{m}} = 0 \quad \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_m R$$

$$\Rightarrow \frac{M}{N} = 0.$$

(2) segue de (1). $\square$

<u>Teorema</u>: Seja $P \in R$-mod. ASASE

(1) P é f.g. e projetivo

(2) P é f.a. e plano

(3) P é f.a. e P_m é livre em R_m-mod $\forall_{m \in \operatorname{Spec}_m R}$

(4) P é local/ livre de caraterística finita

(5) P é f.g. e

$\forall_{p \in \operatorname{Spec} R} \exists_{f \in R} \exists_{n \in \mathbb{N}}$:

$p \in D(f) \wedge \forall_{q \in D(f)} P_q \simeq R_q^n$

Dem (1) $\Rightarrow$ (2) ✓

$$0 \to K \to R^n \to P \to 0$$

$$\Rightarrow R^n = K \oplus P \Rightarrow K \text{ f.g.}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) P plano e f.g. $\Rightarrow$

P_m é plano e f.g. em R_m-mod

$\xRightarrow[R_m \text{ é local}]{}$ P_m é livre de carat. $< \infty$.

(3) $\Rightarrow$ (4) $p \in \operatorname{Spec} R$, seja $m \in \operatorname{Spec}_m R$ tq. $p \subset m$ então P_p é livre

$\xRightarrow[\text{aula passada}]{}$ $\exists f \in R - m$ tq. $P_f \simeq R_f^n$

para algum n

(4) $\Rightarrow$ (5) óbvia.

(5) $\Rightarrow$ (4) $\mathfrak{p} \in D(f)$ tq.

$$\forall \mathfrak{q} \in D(f) \quad P_{\mathfrak{q}} \simeq R^n_{\mathfrak{q}}$$

Seja $\alpha : R^n \to P$ tq. $\alpha_{\mathfrak{p}} : R^n_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\simeq} P_{\mathfrak{p}}$

Como P é f.g.

$$\exists g \in R - \mathfrak{p} : \alpha_g : R^n_g \twoheadrightarrow P_g$$

(aula passada)

$$\therefore \quad \forall \mathfrak{q} \in D(g) : \alpha_{\mathfrak{q}} : R^n_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow P_{\mathfrak{q}}$$

$$\therefore \quad \forall \mathfrak{q} \in D(fg) \ \alpha_{\mathfrak{q}} : R^n_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\simeq} P_{\mathfrak{q}}$$

$(4) \Rightarrow (3)$ P local livre de caract. $< \infty$

$$\Longrightarrow P \text{ local f.g.}$$

$$\Longrightarrow P \text{ f.g.}$$

Por outro lado

$$R^n_f \simeq P_f$$

$$\Rightarrow R^n_m = P_m \quad \forall m \in D(f)$$

$(3) \Rightarrow (1)$ P é projetivo sse

$$\alpha : M \twoheadrightarrow N$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Hom}(P, \alpha) : \mathrm{Hom}(P, M) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(P, N)$$

Seja $\alpha : M \twoheadrightarrow N$

Então $\forall_m$ $\quad \alpha_m : M_m \twoheadrightarrow N_m$

$\Rightarrow \forall_m \quad \mathrm{Hom}(P_m, \alpha_m) : \mathrm{Hom}(P_m, M_m) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(P_m, N_m)$

pq P_m é projetivo

Se P é f.g. então

$$\mathrm{Hom}(P_m, M_m) = \mathrm{Hom}(P, M)_m$$

e $\mathrm{Hom}(P_m, \alpha_m) = \mathrm{Hom}(P, \alpha)_m$

logo $\mathrm{Hom}(P, \alpha)$ é sobrejetivo pq o é em todo o $m \in \mathrm{Spec}_m R$.

$\square$

Teoria de Cohen - Seidenberg:

<u>Objetivo</u>: Dada uma extensão integral R'/R, estudar a relação entre ideais primos de R' e de R.

Em particular, estamos interessados em relacionar cadeias de ideais primos em R e em R'.

Exemplo: $R = \mathbb{C}[y] \overset{\varphi}{\hookrightarrow} R' = \mathbb{C}[x]$;

$y \mapsto x^2$, então $R' | R$ é uma extensão integral

$$\underset{\cap}{x^2 - 4} = \varphi(y-4)$$

Q: Seja $\mathfrak{m}' := \langle x-2 \rangle$.

Temos $\mathfrak{m}' \cap R = \varphi^{-1}\mathfrak{m}' \overset{?}{=} \langle y-4 \rangle$

Diz-se o primo $\mathfrak{m}'$ está sobre $\mathfrak{m} = \langle y-4 \rangle$.
(lies over)